Tutorato di Statistica 1 del 25/10/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Siano $X_1, ..., X_n$ variabili casuali estratti da una Normale Standard, determinare la distribuzione di:

1. $U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
   Sia $Y = X^2$ calcoliamo la distibuzione di Y usando la f.g.m.
   $E[e^{tY}] = E[e^{tX^2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx =$
   Facendo un cambio di variabili ponendo $s = x(1-2t)^{1/2}$ si ottine
   $ds = dx(1-2t)^{1/2}$ quindi:
   $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} (1-2t)^{-1/2} ds =$
   $= (1-2t)^{-1/2} = (\frac{1}{1-2t})^{1/2} = (\frac{1/2}{1/2-t})^{1/2}$
   Quindi $Y \sim \Gamma(1/2, 1/2) \sim \chi^2_{(1)}$ da cui $U \sim \chi^2_n$.

2. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
   Per il teorema 6.8 a pag. 252 del testo si ha che $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

3. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$
   Per il corollario a pag. 253 del libro di testo si ha che $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Esercizio 2.
Sia X v.a. $\sim \chi^2_5$.

1. Determinare i quantili $\chi^2_{0,10}(5)$ e $\chi^2_{0,90}(5)$
   $\chi^2_{0,10}(5) = 1,610$; $\chi^2_{0,90}(5) = 9,236$

2. $P(1,145 \leq X \leq 12,83) = F(12,83) - F(1,145) = 0,975 - 0,050 = 0,925$

3. $P(X \geq 15.09) = 1 - F(15,09) = 1 - 0,99 = 0,01$

Esercizio 3.
Sia $X_1, ..., X_n$ un c.c. estratto da:
$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$

1. Trovare lo stimatore di θ con il metodo dei momenti.
   $E[X] = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}$
   quindi $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}$ da cui $T_\theta = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

2. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.
$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x_i) =$
$\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x_i)$
passando al logaritmo si ottine:
$log(L(\theta)) = nlog(\theta) + \sum_{i=1}^{n} log x_i^{\theta-1} = nlog(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} log x_i$
ricordando che $x_i \in (0,1) \forall i = 1, ..., n$. Derivando:
$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} log x_i = 0$
$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} log x_i$ da cui:
$T_\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} log X_i}$

Calcoliamo ora la varianza dello stimatore $T = t(X_1, ..., X_n) = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} log X_i}$:
$Var(T) = E[T^2] - E[T]^2$
Calcoliamo prima la distribuzione di $Y = -log(X)$
$F_y(y) = P(Y \leq y) = P(-log X \leq y) = P(X \geq e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} \theta x^{\theta-1} dx =$
$1 - e^{-\theta y}$
$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \theta e^{-\theta y}$ Allora $Y \sim Exp(\theta)$ da cui si ottiene che
$Z = -\sum_{i=1}^{n} log X_i \sim \Gamma(n, \theta)$

$E[T] = E[\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} log X_i}] = E[\frac{n}{Z}] = \int_0^{+\infty} \frac{n}{z} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\theta z} dz = \frac{n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \theta^{n-1} z^{(n-1)-1} e^{-\theta z} dz =$
$n\theta \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{n-1}\theta$
$E[T^2] = \int_0^{+\infty} \frac{n^2}{z^2} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\theta z} dz = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)}$
$Var(T) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$

Esercizio 4.
Sia $X_1, ..., X_n$ un c.c. estratto da:
$f(x, \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Trovare uno stimatore di θ con il metodo dei momenti.
$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-|x-\theta|} dx =$
$\frac{1}{2} \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-(x-\theta)} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} x e^{-(-x+\theta)} dx = \theta$
Quindi $T_\theta = \bar{X}$

2. Trovare uno stimatore di massima verosimiglianza di θ.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e^{-|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} |x_i-\theta|}$
Passando al logaritmo:
$log(\frac{1}{2^n}) - \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta| = -nlog2 - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-\theta)^2} = F(\theta)$
Si noti che $F(\theta)$ non è derivabile in $\theta = x_i$, per $i = 1, ..., n$. Derivando:
$\frac{d}{d\theta} log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)}{|(x_i-\theta)|} = \sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - \theta)$
Dobbiamo trovare quindi una scelta per θ t.c. massimizzi la funzione:
Se $n = 2k = 1$, $\hat{\theta} = X_{k+1}$.
Per $n = 2k$, $\hat{\theta} = 1/2(X_{k+1} + X_k)$

Esercizio 5.

Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. distribuite come una $Po(\lambda)$. Stimare il parametro con il metodo dei momenti e della massima verosimiglianza.
$E[X] = \lambda$ quindi lo stimatore è: $\hat{\lambda} = \bar{X}$
$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x!}$
Passando al logaritmo:
$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = log\theta \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta + \sum_{i=1}^{n} log(1/x_i) = log\theta \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta \sum_{i=1}^{n} log(x_i)$
Derivando si ottiene:
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - n = 0$ da cui: $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$